УДК 517.925
DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-3

В. Ш. Ройтенберг

О БИФУРКАЦИЯХ ПЕТЛИ СЕПАРАТРИСЫ ДВУМЕРНОЙ КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация.

Актуальность и цели. Бифуркации в типичных одно- и двухпараметрических семействах гладких динамических систем на плоскости практически полностью изучены. Для приложений представляют значительный интерес и кусочно-гладкие динамические системы на плоскости. Для них различных типов бифуркаций гораздо больше, чем для гладких динамических систем. Некоторые из них уже описаны. Однако продолжение исследования бифуркаций в типичных двухпараметрических семействах двумерных кусочно-гладких динамических систем представляется по-прежнему актуальным.

Материалы и методы. Используются методы качественной теории дифференциальных уравнений.

Результаты. Рассматривается двумерное кусочно-гладкое векторное поле X. Пусть S – точка на линии разрыва поля, и в двух ее полуокрестностях $V1$ и $V2$ поле совпадает с гладкими векторными полями соответственно $X1$ и $X2$. Для векторного поля $X1$ точка S является седлом с ненулевой седловой величиной и инвариантными многообразиями, трансверсальными линии разрыва. В точке S векторное поле $X2$ трансверсально линии разрыва и направлено внутрь $V1$. Выходящая и входящая сепаратрисы седла S, начинающиеся в $V1$, не содержат особых точек и вместе с S образуют петлю. Для двухпараметрических деформаций общего положения рассматриваемых векторных полей в окрестности петли получены бифуркационные диаграммы.

Выводы. Описаны бифуркации петли сепаратрисы рассматриваемой особой точки на линии разрыва векторного поля.

Ключевые слова: динамическая система, кусочно-гладкое векторное поле, петля сепаратрисы седла, бифуркации, бифуркационная диаграмма, периодическая траектория.

V. Sh. Roytenberg

ON THE SEPARATRIS LOOP BIFURCATIONS OF TWO-DIMENSIONAL PIECEWISE-SMOOTH DYNAMIC SYSTEM

Abstract.

Background. Bifurcations in generic one- and two-parameter families of smooth dynamical systems on the plane are almost completely studied. For applications, piecewise-smooth dynamical systems in the plane are of considerable interest. There are much more different types of bifurcations for them than for smooth dynamical systems. Some of them are already described. However, the continuation of the study of bifurcations in generic two-parameter families of two-dimensional piecewise-smooth dynamical systems seems to be still relevant.

Materials and methods. We use methods of the qualitative theory of differential equations.

Results. We consider a two-dimensional piecewise smooth vector field X. Let S be a point on the line of discontinuity of the field, and in its semi-neighborhoods V1 and V2 the field coincides with smooth vector fields, respectively, X1 and X2. For the field X1, the point S is a saddle with nonzero saddle value, whose invariant manifolds are transversal to the line of discontinuity. At the point S vector field X2 is transversal to the line of discontinuity and directed inwards V1. The outgoing and incoming separatrixes of the saddle S that start at V1 do not contain singular points and form a loop together with S. For generic two-parameter deformations of the considered vector fields in the neighborhood of the loop, bifurcation diagrams are obtained.

Conclusions. Bifurcations of the separatrix loop of singular point on the line of discontinuity of the vector field are described.

Keywords: dynamical system, piecewise-smooth vector field, separatrix loop, bifurcations, bifurcation diagram, periodic trajectory.

Введение

Исследованию локальных и нелокальных бифуркаций двумерных кусочно-гладких динамических систем посвящено значительное число работ (см., например, книги [1, 2] и статьи [3–6]). Однако остается много неизученных бифуркаций. Здесь мы рассмотрим одну из них.

Пусть M – связное компактное ориентируемое двумерное C^{r+1}-многообразие ($r \geq 3$), $D = (M_1, M_2, ..., M_m)$ – разбиение M на компактные C^{r+1}-многообразия, пересекающиеся между собой только по компонентам края. *Кусочно-гладким векторным полем* класса C^r на многообразии M с разбиением D называется элемент $X = (X^1, X^2, ..., X^m)$ банахова пространства $X^r(M, D) := \bigoplus_{i=1}^m X^r(M_i)$, где $X^r(M_i)$ – банахово пространство векторных полей класса C^r на M_i с C^r-нормой. *Траекториями* векторного поля X называются траектории дифференциального включения $\dot{z} \in X^*(z)$, $z \in M$, где $X^*(z) = \{X^i(z)\}$ при $z \in \operatorname{int} M_i$, и $X^*(z)$ – выпуклая оболочка векторов $X^i(z), X^j(z)$ при $z \in M_i \cap M_j$ ($i \neq j$) [1, с. 95]. Точки $z \in \partial M_i \cap \partial M_j$, в которых векторы $X^i(z)$ и $X^j(z)$ не касаются $\partial M_i \cap \partial M_j$ и направлены оба либо внутрь M_i, либо внутрь M_j, будем называть *простыми*.

1. Постановка задачи и результаты

Рассмотрим семейство векторных полей $X_\varepsilon = (X_\varepsilon^1, ..., X_\varepsilon^m) \in \mathrm{X}^r(M, D)$, зависящих от параметра ε, принадлежащего некоторой окрестности нуля E в двумерном евклидовом пространстве. Будем предполагать, что отображения $M_i \times E \ni (z, \varepsilon) \mapsto X_\varepsilon^i(z)$ принадлежат классу C^r. Векторные поля $X_\varepsilon^i : M_i \to TM_i$ продолжим до векторных полей $\bar{X}_\varepsilon^i : M \to TM$ так, чтобы и отображения $M \times \mathrm{E} \ni (z,\varepsilon) \mapsto \overline{X}^i_\varepsilon(z)$ принадлежали классу C^r. Пусть точка $S_0 \in M_0 := M_{i_+} \cap M_{i_-} = \partial M_{i_+} \cap \partial M_{i_-}$ при некоторых $i_+, i_+ \in \{1,...,n\}$. Для краткости будем писать $M_\pm$, $X^\pm_\varepsilon$ и $\overline{X}^+_\varepsilon$ вместо $M_{i_\pm}$, $X^{i_\pm}_\varepsilon$ и $\overline{X}^{i_+}_\varepsilon$. Выберем в окрестности V_0 точки S_0 в M C^{r+1}-координаты $x = (x_1, x_2) : V_0 \to \mathbf{R}^2$ так, чтобы точки с координатой $x_2 \le 0$ ($x_2 \ge 0$) принадлежали M_- (M_+), а S_0 имела координаты $x_1 = x_2 = 0$. В этих координатах $X^\pm_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^2 P^\pm_k(x_1, x_2, \varepsilon)\partial / \partial x_k$, где $P^\pm_k$ – C^r-функции.

Пусть поле $X_0 = (X^1_0, ..., X^m_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

У1. *Точка S_0 является грубым седлом векторного поля $\overline{X}^+_0$.*

У2. *Собственные подпространства линейного оператора $d\overline{X}^+_0(S_0) : T_{S_0}M \to T_{S_0}M$ трансверсальны подпространству $T_{S_0}M_0 \subset T_{S_0}M_+$.*

У3. *Для собственных чисел $\lambda^0_1 > 0$ и $\lambda^0_2 < 0$ линейного оператора $d\overline{X}^+_0(S_0)$ седловая величина $\lambda^0_1 + \lambda^0_2 < 0$ (седловой индекс $\gamma^0 = -\lambda^0_2 / \lambda^0_1 > 1$).*

У4. *Вектор $X^-_0(S_0)$ не касается M_0, направлен из M_- и не принадлежит собственному подпространству линейного оператора $d\overline{X}^+_0(S_0)$, соответствующему собственному значению λ^0_1.*

Ввиду условий (У1) и (У4) в некоторой окрестности точки S_0 на M_0 определено касательное C^r-векторное поле X^0_0 такое, что $X^0_0(z) = \tau X^-_0(z) + (1-\tau)X^+_0(z)$ при некотором $\tau = \tau(z) \in \mathbf{R}$ и $X^0_0(S_0) = 0$. Пусть $X^0_0(z) = P^0(x_1)\partial / \partial x_1$.

У5. $\lambda^0 := \partial P^0(0) / \partial x_1 < 0$.

У6. *Существует траектория L_0 поля X_0 со следующими свойствами: ее пересечение с M_+ содержит положительную полутраекторию векторного поля X^+_0, ω-предельную к S_0, и отрицательную полутраекторию этого векторного поля, α-предельную к S_0, она не пересекается с краем ∂M многообразия M, а с $\partial M_i \cap \partial M_j$ $(i \ne j)$ может пересекаться только в простых точках.*

Из У1 по теореме о неявной функции следует, что существуют окрестность $V_1 \subset V_0$ точки S_0 и окрестность E_1 нуля в E такие, что $\forall \varepsilon \in E_1$ поле $\overline{X}^+_\varepsilon$ имеет в V_1 единственную особую точку – седло S_ε с координатами $x_1 = \tilde{x}_1(\varepsilon)$, $x_2 = \tilde{x}_2(\varepsilon)$, где $\tilde{x}_i(\cdot) \in C^r$, $\tilde{x}_i(0) = 0$, $i = 1,2$, при этом $d\overline{X}^+_\varepsilon(S_\varepsilon)$ имеет собственные значения $\lambda_1(\varepsilon) > 0$, $\lambda_2(\varepsilon) < 0$, $\lambda_k(\cdot) \in C^{r-1}$, $\lambda_k(0) = \lambda^0_k$, $k = 1,2$. Пусть $\gamma(\varepsilon) := -\lambda_2(\varepsilon) / \lambda_1(\varepsilon)$.

Выбор координат x_1, x_2 задает на M ориентацию. Пусть $\eta:(-1,1)\to \operatorname{int} M_+$ – такое C^∞-вложение, что $\eta(0)\in L_0$, а репер $(X_0^+(\eta(0),\eta'(0))$ положительно ориентирован. Если окрестность E_1 достаточно мала, то выходящая (входящая) сепаратриса седла S_ε C^{r-1} гладко зависит от $\varepsilon\in E_1$ [7] и потому пересекает $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(v_+(\varepsilon))$ ($\eta(v_-(\varepsilon))$), где $v_\pm(\cdot)\in C^{r-1}$, $v_\pm(0)=0$. Обозначим $\tilde v(\varepsilon):=v_+(\varepsilon)-v_-(\varepsilon)$.

Потребуем, чтобы выполнялось следующее условие.

У7. *Векторы* $\partial\tilde x_2(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ *и* $\partial\tilde v(\varepsilon)/\partial\varepsilon$ *линейно независимы.*

Из У7 следует, что в некоторой окрестности E_2 точки $0\in E_1$ можно выбрать C^{r-1}-координаты $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ так, что $\tilde x_2(\varepsilon)=-\varepsilon_1$, $\tilde v(\varepsilon)=\varepsilon_2$. Рисунок 1 иллюстрирует выбор параметров $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$. Будем отождествлять точку $\varepsilon\in E_2$ с ее координатной строкой: $\varepsilon\equiv(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ и считать $E_2=(-\delta_*,\delta_*)^2$ при некотором $\delta_*>0$.

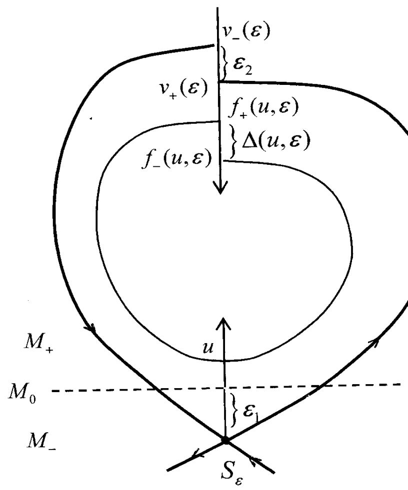

Рис. 1. Выбор параметров

В координатах условие У2 означает, что $\partial P_2^+(0)/\partial x_1\neq 0$. Можно считать, что координаты x_1,x_2 выбраны так, что $\partial P_2^+(0)/\partial x_1>0$.

Пусть $v_0=v_{0,1}\partial/\partial x_1+v_{0,2}\partial/\partial x_2$ ($k=1,2$) – собственный вектор $d\overline{X}_0^+(S_0)$, соответствующий собственному числу $\lambda_1^0>0$. Ввиду условия У4 $R:=v_{0,1}/v_{0,2}-P_1^-(0)/P_2^-(0)\neq 0$. Величина $\operatorname{sgn} R$ не зависит от произвола в выборе координат.

Теорема. Пусть выполняются условия У1–У7. Тогда существуют окрестность U петли $\Gamma_0=L_0\cup S_0$, граница ∂U которой состоит из двух кусочно-гладких кривых, и число $\delta\in(0,\delta_*)$ со следующими свойствами:

1. Положительные полутраектории векторных полей X_ε, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, начинающиеся в точках ∂U входят в U.

2. Бифуркационная диаграмма семейства векторных полей X_ε, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, в U представляет собой разбиение области параметров $(-\delta,\delta)^2$ на множества $B_0=\{(0,0)\}$, B_i, E_i ($i=1,\dots,4$ при $R<0$ и $i=1,\dots,5$ при $R>0$), где при $R<0$ $E_1=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(0,\delta),\,-\delta<\varepsilon_2<\beta_1(\varepsilon_1)\}$, $B_1=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(0,\delta),\ \varepsilon_2=\beta_1(\varepsilon_1)\}$, $\beta_1:(0,\delta)\to(0,\delta)$, $\beta_1\in C^1$, $\beta_1(+0)=\beta_1'(+0)=0$, $E_2=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(0,\delta),\ \beta_1(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<\delta\}$, $B_2=\{0\}\times(0,\delta)$, $E_3=(-\delta,0)\times(0,\delta)$, $B_3=(-\delta,0)\times\{0\}$, $E_4=(-\delta,0)\times(-\delta,0)$, $B_4=\{0\}\times(-\delta,0)$ (рис. 2).

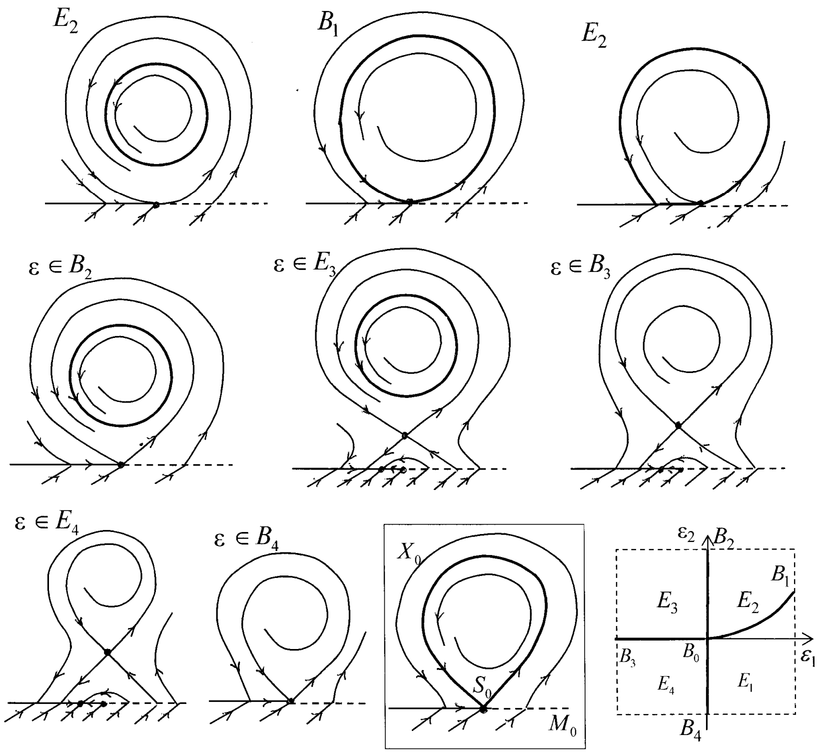

Рис. 2. Бифуркационная диаграмма в случае $R<0$

При $R>0$ E_1, B_1, B_2, E_2, E_3, B_3 определяются так же, как в случае $R<0$, $E_4=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(-\delta,0),\,\beta_4(\varepsilon_1)<\varepsilon_2<0\}$, $E_5=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(-\delta,0),\,-\delta<\varepsilon_2<<\beta_4(\varepsilon_1)\}$, $B_5=\{0\}\times(-\delta,0)$ $B_4=\{\varepsilon:\varepsilon_1\in(-\delta,0),\ \varepsilon_2=\beta_4(\varepsilon_1)\}$, $\beta_4:(-\delta,0)\to\to(-\delta,0)$, $\beta_4\in C^1$, $\beta_4(-0)=\beta_4'(-0)=0$ (рис. 3).

Схемы фазовых портретов векторных полей X_ε в U имеют вид, изображенный на рис. 2 в случае $R<0$, на рис. 3 – в случае $R>0$, причем векторные поля X_ε при $\varepsilon\in E_i$ – грубые в U, а при $\varepsilon\in B_i$ ($i\neq 0$) – первой степени негрубости в U.

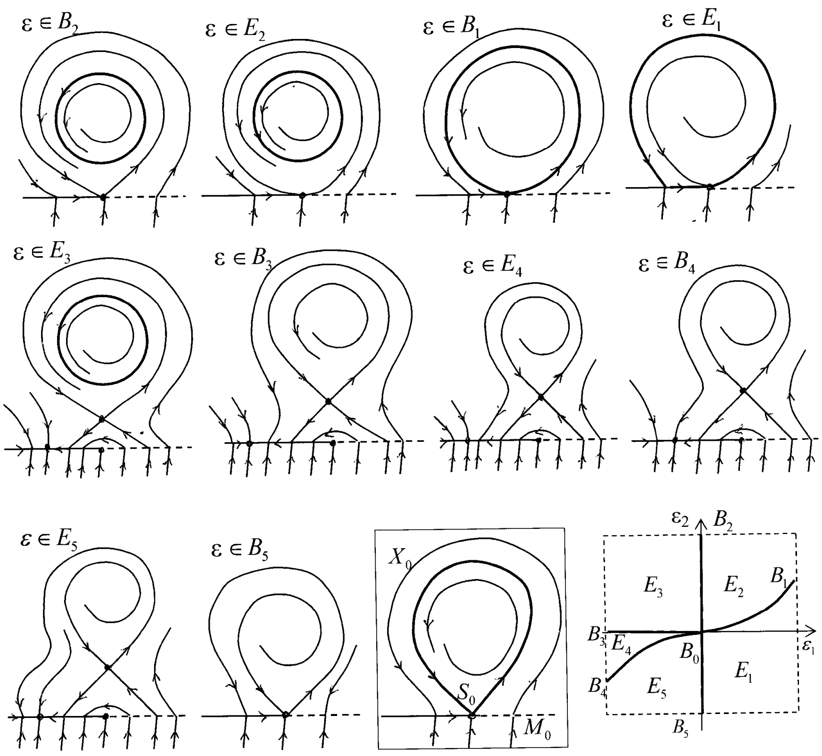

Рис. 3. Бифуркационная диаграмма в случае $R>0$

3. Доказательство теоремы

Так как $\gamma(0)=\gamma^0$, то можно считать, что

$$\forall\varepsilon\in(-\delta_*,\delta_*)^2\ \ \gamma(\varepsilon)\ge\overline{\gamma}>1>1/\overline{\gamma}\ge 1/\gamma(\varepsilon). \qquad (1)$$

Поскольку $P_2^+(0)=0$, а $\partial P_2^+(0)/\partial x_1>0$, то существуют такие числа $a>0$, $b>0$, $0<\delta_1<\min\{b,\delta_*\}$ и C^r-функция

$$x_1^*:(-2b,2b)\times(-\delta_1,\delta_1)^2\to(-a,a),\ x_1^*(0,0)=0,$$

что $\forall\varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1)^2\ \ \forall(x_1,x_2)\in(-2a,2a)\times(-2b,2b)\ \partial P_2^+(x_1,x_2,\varepsilon)/\partial x_1>0$,

$$\operatorname{sgn}(P_2^+(x_1,x_2,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(x_1-x_1^*(x_2,\varepsilon)). \qquad (2)$$

Так как $P_2^+(\tilde{x}_1(\varepsilon),-\varepsilon_1,\varepsilon)=0,$ то

$$\forall\varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1)^2\ \ \tilde{x}_1(\varepsilon)=x_1^*(-\varepsilon_1,\varepsilon). \qquad (3)$$

Сделаем замену координат: $(x_1,x_2)\overset{\theta_{1\varepsilon}}{\mapsto}(y_1=x_1-x_1^*(x_2,\varepsilon),\ y_2=x_2+\varepsilon_1)$. Точки с координатами $y_2\le\varepsilon_1$ ($y_2\ge\varepsilon_1$) принадлежат M_- (M_+). Ввиду (2) и (3) в новых координатах $\overline{X}_\varepsilon^+(z)=Q_1^+(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_1+Q_2^+(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_2$, где

Q_1^+ и Q_2^+ – C^{r-1}-функции, область определения которых содержит множества $(-a,a)\times(-b,b)\times(-\delta_1,\delta_1)^2$ такие, что $\forall(y_1,y_2,\varepsilon)\in(-a,a)\times(-b,b)\times$ $\times(-\delta_1,\delta_1)^2$ $Q_1^+(0,0,\varepsilon)=0$,

$$\partial Q_2^+(y_1,y_2,\varepsilon)/\partial y_1>0, \tag{4}$$

$$\operatorname{sgn} Q_2^+(y_1,y_2,\varepsilon)=\operatorname{sgn} y_1. \tag{5}$$

Пусть также $X_\varepsilon^-(z)=Q_1^-(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_1+Q_2^-(y_1,y_2,\varepsilon)\partial/\partial y_2$. Ввиду У4 можно считать a, b и δ_1 выбранными так, что

$$\forall\varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1)^2\ \ \forall(y_1,y_2)\in(-a,a)\times(-b,\varepsilon_1]\ \ Q_2^-(y_1,y_2,\varepsilon)>0. \tag{6}$$

Вследствие (5) имеем

$$\partial Q_2^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_2=0. \tag{7}$$

Поэтому для собственных векторов $v^k(\varepsilon)=v_1^k(\varepsilon)\partial/\partial y_1+v_2^k(\varepsilon)\partial/\partial y_2$ линейного оператора $d\bar{X}_\varepsilon^+(S_\varepsilon)$, соответствующих собственным числам $\lambda_k(\varepsilon)$, $k=1,2$, имеем уравнение $v_1^k(\varepsilon)\partial Q_2^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_1-v_2^k(\varepsilon)\lambda_k(\varepsilon)=0$. Ввиду (4) можно считать, что $v_1^k(\cdot)\in C^{r-1}$, $v_1^1(\varepsilon)>0$, $v_1^2(\varepsilon)<0$.

Вследствие (7) имеем

$$\det(\partial Q_i^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_j)=-(\partial Q_1^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_2)(\partial Q_2^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_1).$$

Так как S_ε – седло, то $\det(\partial Q_i^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_j)<0$. Используя (4), получаем

$$\partial Q_1^+(0,0,\varepsilon)/\partial y_2>0. \tag{8}$$

Поэтому δ_1, a и b можно считать выбранными так, что

$$\operatorname{sgn} Q_1^+(0,y_2,\varepsilon)=\operatorname{sgn} y_2 \text{ при всех } (y_2,\varepsilon)\in(-b,b)\times(-\delta_1,\delta_1)^2. \tag{9}$$

Ввиду (5), (6) и (9) точка $T_\varepsilon=\theta_{1\varepsilon}^{-1}(0,\varepsilon_1)$ является грубой особой точкой поля X_ε типа 2а при $\varepsilon_1>0$ и типа 2б при $\varepsilon_1<0$ [1, с. 164]. При $\varepsilon_1=0$ $T_\varepsilon=S_\varepsilon$.

Сделаем замену координат $(z_1=y_1-v_1^2(\varepsilon)y_2,\ z_2=-y_1+v_1^1(\varepsilon)y_2)$. При достаточно малых $\delta_2\in(0,\delta_1)$ и $c>0$ локальное неустойчивое (устойчивое) инвариантное многообразие $W_{loc}^u(S_\varepsilon)$ ($W_{loc}^s(S_\varepsilon)$) седла S_ε, $\varepsilon\in(-\delta_2,\delta_2)^2$, задается в новых координатах уравнением $z_2=w_2(z_1,\varepsilon)$, $|z_1|<c$ ($z_1=w_1(z_2,\varepsilon)$, $|z_2|<c$), где функции $w_j\in C^{r-1}$, $w_j(0,\varepsilon)=0$, $j=1,2$, $\partial w_1(0,\varepsilon)/\partial z_2=$ $=\partial w_2(0,\varepsilon)/\partial z_1=0$, дуга $W_{loc}^u(S_0)$ ($W_{loc}^s(S_0)$) с координатой $z_1\in(0,c)$

($z_2 \in (0,c)$) принадлежит L_0. Сделаем замену координат $(z_1,z_2) \overset{\theta_{3\varepsilon}}{\mapsto}$ $(u_1 = z_1 - w_1(z_2,\varepsilon), u_2 = z_2 - w_2(z_1,\varepsilon))$. В координатах u_1, u_2 $W^u_{loc}(S_\varepsilon)$ ($W^s_{loc}(S_\varepsilon)$) задается уравнением $u_2 = 0$ ($u_1 = 0$), при этом точки дуги $W^u_{loc}(S_0)$ ($W^s_{loc}(S_0)$) с координатой $u_1 \in (0,c)$ ($u_2 \in (0,c)$) принадлежат L_0.

Пусть $\eta_{1\varepsilon} : (-b,b) \to M$, $\varepsilon \in (-\delta_2,\delta_2)^2$, где $\eta_{1\varepsilon}(u) := x^{-1} \circ \theta^{-1}_{1\varepsilon}(0,u)$. Мы можем считать, что дуга $\eta_{10}(0,b)$ не пересекается с Γ_0. Точка $\eta_{1\varepsilon}(u)$ имеет координаты

$$u_1 = -v_1^2(\varepsilon)u + \alpha_1(u,\varepsilon),\ u_2 = v_1^1(\varepsilon)u + \alpha_2(u,\varepsilon), \tag{10}$$

где $\alpha_j \in C^{r-1}$, $\alpha_j(u,\varepsilon) = o(u)$ равномерно относительно ε, $j = 1,2$.

Если числа $d \in (0,c)$ и $\delta_3 \in (0,\delta_2)$ достаточно малы, то $\forall \varepsilon \in (-\delta_3,\delta_3)^2$ определено отображение $\eta_{2\varepsilon} : [0,d] \to M$, $\eta_{2\varepsilon}(u) := x^{-1} \circ \theta^{-1}_{1\varepsilon} \circ \theta^{-1}_{2\varepsilon} \circ \theta^{-1}_{3\varepsilon}(d,u))$; при этом дуга $\eta_{20}[0,d]$ принадлежит $\operatorname{int} M_+$, а дуга $\eta_{20}(0,d]$ лежит с той же стороны от петли Γ_0, что и дуга $\eta(0,1)$. При достаточно малом $\delta_4 \in (0,\delta_3)$ $\forall \varepsilon \in (-\delta_4,\delta_4)^2$ дуга $\eta_{2\varepsilon}[0,d]$ также принадлежит $\operatorname{int} M_+$. Согласно [4, с. 51–52] существуют такие числа $d_1 \in (0,d)$, $\alpha > 0$ и $\delta_5 \in (0,\delta_4)$, что положительная полутраектория поля $\bar{X}^+_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_5,\delta_5)^2$, начинающаяся в точке с координатами $u_1 = p$, $u_2 = q$, $p,q \in (0,d_1)$, первый раз пересекает дугу $\eta_{2\varepsilon}[0,d)$ в точке $\eta_{2\varepsilon}(\bar{f}_1(p,q,\varepsilon))$, где $\bar{f}_1(p,q,\varepsilon) = p^{\gamma(\varepsilon)} q(\bar{l}_1(\varepsilon) + \bar{r}_1(p,q,\varepsilon))$, $\bar{l}, \bar{r}_1 \in C^1$, $\bar{l}(\varepsilon) > 0$, $|\partial^m \bar{r}_1(p,q,\varepsilon) / \partial p^i \partial q^j \partial \varepsilon^k| \le p^{\alpha - i}$, $0 \le i + j + k \le m \le 1$. Отсюда и из представления (10) для координат точки $\eta_{1\varepsilon}(u)$ следует существование такого $\bar{u} > 0$, что положительная полутраектория поля $\bar{X}^+_\varepsilon$, начинающаяся в точке $\eta_{1\varepsilon}(u)$, $u \in (0,\bar{u})$, первый раз пересекает дугу $\eta_{2\varepsilon}[0,d)$ в точке $\eta_{2\varepsilon}(f_1(u,\varepsilon))$, где $f_1(u,\varepsilon) = u^{\gamma(\varepsilon)+1}(l_1(\varepsilon) + r_1(u,\varepsilon))$, $l, r_1 \in C^1$, $l(\varepsilon) > 0$, при некотором $C > 0$ $|\partial^m r_1(u,\varepsilon) / \partial u^i \partial \varepsilon^k| \le C u^{\alpha - i}$, $0 \le i + k \le m \le 1$. Ввиду (5) и (9) дуга траектории поля $\bar{X}^+_\varepsilon$, $\varepsilon \in (-\delta_5,\delta_5)^2$, между точкой $\eta_{1\varepsilon}(u)$, где $u \in (0,\bar{u})$, если $\varepsilon_1 \le 0$, и $u \in [\varepsilon_1,\bar{u})$, если $\varepsilon_1 > 0$, и точкой $\eta_{2\varepsilon}(f_1(u,\varepsilon))$ является и дугой траектории поля X^+_ε. Так как точка $\eta_{2\varepsilon}(0)$ находится на выходящей сепаратрисе седла S_ε, то числа $\delta_6 \in (0,\delta_5)$ и $d_2 \in (0,d)$ можно выбрать так, что $\forall \varepsilon \in (-\delta_6,\delta_6)^2$ определено отображение $\eta_{2\varepsilon}(u) \mapsto \eta(f_2(u,\varepsilon))$, $u \in [0,d_2)$, по траекториям векторного поля X_ε такое, что $f_2 \in C^1$, $f_2(0,\varepsilon) = v_+(\varepsilon)$, $(f_2)'_u(u,\varepsilon) > 0$. При достаточно малых $u_0 \in (0,\bar{u})$ и $0 < \delta_7 < \min\{u_0,\delta_6\}$ $f_+(u,\varepsilon) := f_2(f_1(u,\varepsilon),\varepsilon)$ определена для $(u,\varepsilon) \in (0,u_0] \times (-\delta_7,\delta_7)^2$, причем $f_+(u,\varepsilon) = v_+(\varepsilon) + u^{\gamma(\varepsilon)+1}(l_+(\varepsilon) + r_+(u,\varepsilon))$, где $l_+, r_+ \in C^1$, $l_+(\varepsilon) > 0$; при некотором $C_+ > 0$ $|\partial^n r_+(u,\varepsilon)/\partial u^i \partial\varepsilon^k| \le C_+ u^{\alpha-i}$, $0 \le i+k \le n \le 1$, а отображение $\eta_{1\varepsilon}(u) \mapsto \eta(f_+(u,\varepsilon))$, рассматриваемое для $u \in (0,u_0]$, если $\varepsilon \in (-\delta_7,0]\times(-\delta_7,\delta_7)$, и для $u \in [\varepsilon_1,u_0]$, если $\varepsilon \in (0,\delta_7)\times(-\delta_7,\delta_7)$, является отображением по траекториям поля X_ε (см. рис. 1).

Уменьшив при необходимости α, u_0 и соответственно δ_7, аналогично получим функцию $f_-(u,\varepsilon) = v_-(\varepsilon) + u^{1/\gamma(\varepsilon)+1}(l_-(\varepsilon) + r_-(u,\varepsilon))$, $(u,\varepsilon) \in (0,u_0)\times$ $\times(-\delta_7,\delta_7)^2$, где $l_-, r_- \in C^1$, $l_-(\varepsilon) > 0$; при некотором $C_- > 0$ $|\partial^m r_-(u,\varepsilon)/\partial u^i \partial\varepsilon^k| \le C_- u^{\alpha-i}$, $0 \le i+k \le m \le 1$, такую, что отображение $\eta_{1\varepsilon}(u) \mapsto \eta(f_-(u,\varepsilon))$, рассматриваемое для $u \in (0,u_0]$, если $\varepsilon \in (-\delta_7,0]\times$ $\times(-\delta_7,\delta_7)$, и для $u \in [\varepsilon_1,u_0]$, если $\varepsilon \in (0,\delta_7)\times(-\delta_7,\delta_7)$, является отображением по траекториям векторного поля $-X_\varepsilon$ (см. рис. 1).

Обозначим $f_-^{-1}(\cdot,\varepsilon)$ функцию, обратную к функции $f_-(\cdot,\varepsilon)$. Введем функции $f(u,\varepsilon) := f_-^{-1}(f_+(u,\varepsilon),\varepsilon)$ и

$$\Delta(u,\varepsilon) := f_+(u,\varepsilon) - f_-(u,\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon_2 + u^{\gamma(\varepsilon)+1}(l_+(\varepsilon) + r_+(u,\varepsilon)) - u^{1/\gamma(\varepsilon)+1}(l_-(\varepsilon) + r_-(u,\varepsilon)). \quad (11)$$

Функция $f(\cdot,\varepsilon)$ на промежутке $(0,u_0]$ при $\varepsilon \in (-\delta_7,0]\times(-\delta_7,\delta_7)$ и на промежутке $[\varepsilon_1,u_0]$ при $\varepsilon \in (0,\delta_7)\times(-\delta_7,\delta_7)$ является функцией последования по траекториям поля X_ε. В этих случаях равенство $f(u_p,\varepsilon) = u_p$ ($\Delta(u_p,\varepsilon) = 0$) равносильно тому, что через точку $\eta_{1\varepsilon}(u_p)$ проходит замкнутая траектория поля X_ε. Эта траектория является устойчивой гиперболической, если $f'_u(u_p,\varepsilon) < 1$ ($\Delta'_u(u_p,\varepsilon) < 0$).

Из (11) и (1) следует существование таких чисел $\delta_8 \in (0,\delta_7)$ и $K > 0$, что

$$\forall (u,\varepsilon) \in (0,u_0]\times(-\delta_8,\delta_8)^2 \;\; \partial\Delta(u,\varepsilon)/\partial u < -Ku^{1/\bar\lambda} < 0, \quad (12)$$

$$\partial\Delta(u,\varepsilon)/\partial\varepsilon_2 > 1/2 > 0. \quad (13)$$

Обозначим $\Delta_1(\varepsilon) := \Delta(\varepsilon_1,\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0,\delta_8)\times(-\delta_8,\delta_8)$. Из (11) следует, что $\Delta_1(+0,\varepsilon_2) = \varepsilon_2$, $\partial\Delta_1(+0,\varepsilon_2)/\partial\varepsilon_1 = 0$. Поэтому $\Delta_1(\varepsilon)$ можно продолжить до C^1-функции на $(-\delta_8,\delta_8)^2$, положив при $\Delta_1(\varepsilon) := \varepsilon_2$ при $\varepsilon_1 \le 0$. Из (13) и равенств $\Delta_1(0) = \partial\Delta_1(0)/\partial\varepsilon_1 = 0$ по теореме о неявной функции получаем, что существует такое $\delta_9 \in (0,\delta_8)$, что для любого $\varepsilon_1 \in (-\delta_9,\delta_9)$ уравнение $\Delta_1(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = 0$ имеет относительно ε_2 единственное решение $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)$, при этом $\beta_1(0) = 0$, $\beta_1(\cdot) \in C^1$, $\beta_1'(0) = 0$, для $\varepsilon_1 \in (0,\delta_9)$ $0 < \beta_1'(\varepsilon_1) < 1$ и потому $\beta_1(\varepsilon_1) \in (0,\delta_9)$. Из (13) и равенства $\Delta(\varepsilon_1,(\varepsilon_1,\beta_1(\varepsilon_1))) = 0$ имеем

$$\forall\varepsilon\in(0,\delta_9)\times(-\delta_9,\delta_9)\ \ \operatorname{sgn}\Delta(\varepsilon_1,\varepsilon)=\operatorname{sgn}(\varepsilon_2-\beta_1(\varepsilon_1)).\qquad(14)$$

Поскольку $\Delta(+0,\varepsilon)=0$ при $\varepsilon\in(-\delta_9,0]\times\{0\}$, то из (9) получаем, что

$$\Delta(u,\varepsilon)<0 \text{ для всех } u\in(0,u_0],\ \varepsilon\in(-\delta_9,0]\times\{0\}.\qquad(15)$$

Из (15) следует, что $u_*=f(u_0,0)<u_0$. Если петля $\Gamma_0\subset M_+$, то нетрудно построить C^1-гладкую простую замкнутую кривую $\Gamma^+\subset\operatorname{int}M_+$, пересекающуюся с дугой $\eta_{10}[0,u_0]$ в единственной точке $\eta_{10}(u_*)$ и ограничивающую вместе с Γ_0 цилиндрическую область $U^+\subset\operatorname{int}M_+$, не содержащую особых точек поля X_0^+; при этом в точках $z\in\Gamma^+$ вектор $X_0^+(z)$ не касается Γ^+ и направлен внутрь U^+. Если петля Γ не содержится в M_+, то аналогично можно построить простую кусочно-гладкую замкнутую кривую $\Gamma^+=\bigcup_{j=1}^{s}\widehat{B_jB_{j+1}}$, состоящую из C^1-гладких дуг $\widehat{B_jB_{j+1}}\subset\partial M_{\sigma_j}$ ($B_{s+1}=B_1$) при некоторых $\sigma_j\in\{1,...,n\}$ и трансверсальных ∂M_{σ_j}, с концами $B_j,B_{j+1}\in\partial M_{\sigma_j}$; при этом Γ^+ пересекается с дугой $\eta_{10}[0,u_0]$ в единственной точке $\eta_{10}(u_*)$, Γ^+ и Γ ограничивают цилиндрическую область U^+, не содержащую особых точек поля X_0; в точках $z\in\widehat{B_jB_{j+1}}$ вектор $X_0^+(z)$ не касается дуги $\widehat{B_jB_{j+1}}$ и при $z\neq B_{j+1}$ направлен внутрь U^+.

Будем считать δ_9 столь малым, что $\forall\varepsilon\in(-\delta_9,\delta_9)^2$ Γ^+ пересекается с дугой $\eta_{10}[0,u_0]$ в единственной точке $\eta_{1\varepsilon}(u_r(\varepsilon))$, где $u_r(\varepsilon)\in(u_*/2,u_0)$. Уменьшив при необходимости δ_9, из (15) будем иметь

$$\forall\varepsilon\in(-\delta_9,\delta_9)^2\ \ \forall u\in[u_*/2,u_0]\ \ \Delta(u,\varepsilon)<0.\qquad(16)$$

Аналогично Γ^+ мы можем построить простую замкнутую кривую $\Gamma^-=\bigcup_{j=1}^{l}\widehat{A_jA_{j+1}}$, состоящую из C^1-гладких дуг $\widehat{A_jA_{j+1}}\subset M_{\sigma_j}$ при некоторых $\sigma_j\in\{1,...,n\}$ и трансверсальных ∂M_{σ_j} с концами $A_j,A_{j+1}\in\partial M_{\sigma_j}$; причем $M_{\sigma_1}=M_-$, $A_1=A_{l+1}=\theta_{10}^{-1}(a_1,0)$, $A_2=\theta_{10}^{-1}(a_2,0)$, $-a<a_1<0<a_2<a$, Γ^- не пересекает открытую дугу $\overline{A_1A_2}$ между точками A_1 и A_2 на M_0, Γ^- и Γ_0 ограничивают область U^-, не содержащую особых точек поля X_0, $\forall z\in\widehat{A_jA_{j+1}}$ вектор $X_0^{\sigma_j}(z)$ не касается $\widehat{A_jA_{j+1}}$ и для $z\neq A_1,A_2$ при $j=1$ и для $z\neq A_{j+1}$ при $j=2,...,l$ направлен внутрь U^-.

Множество $U=U^-\cup U^+\cup\Gamma_0$ – цилиндрическая окрестность петли Γ_0. Пусть $\widehat{A_1T_\varepsilon}$ – дуга между точками A_1 и T_ε на M_0. При достаточно малом δ_9 $\forall\varepsilon\in(-\delta_9,\delta_9)^2$ $U\setminus\widehat{A_1T_\varepsilon}$ не содержит особых точек поля X_ε, кроме точки

S_ε при $\varepsilon \in (-\delta_9, 0) \times (-\delta_9, \delta_9)$, все положительные полутраектории поля X_ε, начинающиеся в точках $\partial U = \Gamma^- \cup \Gamma^+$, входят в U, все отрицательные полутраектории поля X_ε^-, начинающиеся в точках дуги $\overline{A_1 A_2}$, выходят из U в точках дуги $\widehat{A_1 A_2}$. Тогда множество $U \setminus \widehat{A_1 T_\varepsilon} \setminus \eta_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, u_r(\varepsilon))$ односвязно и имеет место

Лемма 1. Любая положительная полутраектория $X_\varepsilon, \varepsilon \in (-\delta_9, \delta_9)^2$, начинающаяся в точке U и при $\varepsilon \in (-\delta_9, 0] \times (-\delta_9, \delta_9)$ отличная от седла S_ε и его входящих сепаратрис, обязательно пересечет либо дугу $\widehat{A_1 T_\varepsilon}$ либо дугу $\eta_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, u_r(\varepsilon))$.

Из (12), (14) и (16) следует

Лемма 2. При $\varepsilon_1 \in (0, \delta_9)$, $\beta_1(\varepsilon_1) < \varepsilon_2 < \delta$ ($\varepsilon \in (-\delta_9, 0] \times (0, \delta_9)$) существует устойчивая гиперболическая замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε, проходящая через точку дуги $\eta_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, u_r(\varepsilon))$ ($\eta_{1\varepsilon}(0, u_r(\varepsilon))$), а все другие траектории, пересекающие эту дугу к ней ω-предельны. При $\varepsilon_1 \in (0, \delta_9)$, $\varepsilon_2 = \beta_1(\varepsilon_1)$ через точку $\eta_{1\varepsilon}(\varepsilon_1)$ проходит замкнутая траектория Γ_ε поля X_ε, а траектории, пересекающие дугу $\eta_{1\varepsilon}(\varepsilon_1, u_r(\varepsilon))$ ω-предельны к ней. При $\varepsilon_1 \in (0, \delta_9)$, $-\delta_9 < \varepsilon_2 < \beta_1(\varepsilon_1)$ ($\varepsilon \in (-\delta_9, 0] \times (-\delta_9, 0)$) не существует замкнутых траекторий, пересекающих дугу $\eta_{1\varepsilon}[\varepsilon_1, u_r(\varepsilon))$ ($\eta_{1\varepsilon}(0, u_r(\varepsilon))$). При $\varepsilon \in (-\delta_9, 0] \times \{0\}$ траектории, пересекающие дугу $\eta_{1\varepsilon}(0, u_r(\varepsilon))$, ω-предельны к петле сепаратрисы точки S_ε.

Ввиду (5) и (6) $\forall \varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$ на дуге $\theta_{1\varepsilon}^{-1}((-a, a) \times \{\varepsilon_1\}) \subset M_0$ определено касательное векторное поле X_ε^0 класса C^r такое, что $X_\varepsilon^0(z) = \tau X_\varepsilon^+(z) + (1-\tau) X_\varepsilon^+(z)$ при некотором $\tau = \tau(z, \varepsilon) \in \mathbb{R}$. При $\varepsilon = 0$ оно уже было введено в условии У5. Из (5) и (6) следует, что при $z \in \Lambda_\varepsilon := \theta_{1\varepsilon}^{-1}((-a, 0) \times \{\varepsilon_1\})$ $\tau(z, \varepsilon) \in [0, 1]$, и потому дуга Λ_ε состоит из особых точек и линейных особенностей [1] векторного поля X_ε. Мы можем считать δ_1 столь малым, что точка $A_1 \in \Lambda_\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (-\delta_1, \delta_1)^2$.

Обозначим $a_{ij} := \partial Q_i^+(0) / \partial y_j$. Вектор $(v_1^1(0), 1)$ – собственный вектор матрицы (a_{ij}), соответствующий собственному значению λ_1^0. Пусть

$$R^* := v_1^1(0) - Q_1^-(0) / Q_2^-(0), \tag{17}$$

тогда $\operatorname{sgn} R^* = \operatorname{sgn} R$.

В координатной записи поле X_ε^0 имеет вид $X_\varepsilon^0(z) = Q^0(y_1, \varepsilon) \partial / \partial y_1$, где

$$Q^0(y_1, \varepsilon) = [Q_1^+(y_1, \varepsilon_1, \varepsilon) - Q_1^-(y_1, \varepsilon_1, \varepsilon) \tilde{\tau}(y_1, \varepsilon)][1 - \tilde{\tau}(y_1, \varepsilon)]^{-1},$$

$$\tilde{\tau}(y_1, \varepsilon) = Q_2^+(y_1, \varepsilon_1, \varepsilon) / Q_2^-(y_1, \varepsilon_1, \varepsilon),$$

и потому

$$Q^0(y_1,\varepsilon)=[a_{11}-a_{21}(Q_1^-(0)/Q_2^-(0))]y_1+a_{12}\varepsilon_1+r(y_1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,, \tag{18}$$

$$r(0,0,\varepsilon_2)=\partial r(0,0,\varepsilon_2)/\partial y_1=\partial r(0,0,\varepsilon_2)/\partial\varepsilon_1=0\,.$$

Из У5 и (18) получаем

$$\lambda^0=\partial Q^0(0,0)/\partial y_1=a_{11}-a_{21}(Q_1^-(0)/Q_2^-(0))\,. \tag{19}$$

Так как $\lambda^0<0$, то мы можем считать a и δ_1 выбранными так, что

$$\forall y_1\in(-a,a)\ \ \forall\varepsilon\in(-\delta_1,\delta_1)^2\ \ \partial Q^0(y_1,\varepsilon)/\partial y_1<0\,. \tag{20}$$

Вследствие (18) и (8)

$$\partial Q^0(0,0)/\partial\varepsilon_1=\partial Q_1^+(0)/\partial y_2>0\,. \tag{21}$$

Из (18)–(21) и условия $\lambda^0<0$ по теореме о неявной функции получаем, что при некотором $\delta_{10}\in(0,\delta_9)$

$$\forall y_1\in(-a,a)\ \ \forall\varepsilon\in(-\delta_{10},\delta_{10})^2\ \ \operatorname{sgn}Q^0(y_1,\varepsilon)=-\operatorname{sgn}(y_1-y_1^*(\varepsilon))\,, \tag{22}$$

$$\partial Q^0(y_1^*(\varepsilon),\varepsilon)/\partial y_1<0\,,\ \text{где}\ y_1^*:(-\delta_{10},\delta_{10})^2\to(-a/2,a/2)\,,$$

$$y_1^*(\varepsilon)=(-a_{12}/\lambda^0+\alpha_3(\varepsilon))\varepsilon_1,\ \alpha_3\in C^1,\ \alpha_3(0)=0\,. \tag{23}$$

Таким образом, при $\varepsilon\in[0,\delta_{10})\times(-\delta_{10},\delta_{10})$ Λ_ε – устойчивая линейная особенность поля X_ε, при $\varepsilon\in(-\delta_{10},0)\times(-\delta_{10},\delta_{10})$ $N_\varepsilon=\theta_{1\varepsilon}^{-1}(y_1^*(\varepsilon),\varepsilon_1)$ – устойчивая особая точка класса 1a [1, с. 164], $\Lambda_\varepsilon\setminus N_\varepsilon$ состоит из двух устойчивых линейных особенностей Λ_ε^- и Λ_ε^+, в точках которых соответственно $y_1<y_1^*(\varepsilon)$ и $y_1>y_1^*(\varepsilon)$. Мы можем считать δ_{10} столь малым, что точка N_ε принадлежит дуге $\overset{\frown}{A_1T_\varepsilon}$.

При достаточно малом δ_{10} одна из выходящих (входящих) сепаратрис седла S_ε поля X_ε^+, $\varepsilon\in(-\delta_{10},0)\times(-\delta_{10},\delta_{10})$, первый раз пересекается с дугой $\overset{\frown}{A_1T_\varepsilon}$ ($\overset{\frown}{A_2T_\varepsilon}$) в ее внутренней точке C_ε^- (C_ε^+) с координатой

$$y_1=y_1^-(\varepsilon)=\varepsilon_1(v_1^1(0)+o(1))\ \ (\,y_1=\varepsilon_1(v_1^2(0)+o(1))\,). \tag{24}$$

Обозначим эту сепаратрису $L_{1\varepsilon}^u$ ($L_{1\varepsilon}^s$). Вторую выходящую (входящую) сепаратрису обозначим $L_{2\varepsilon}^u$ ($L_{2\varepsilon}^s$).

Из (23), (24) , (17) и (19) получаем

$$y_1^-(\varepsilon)-y_1^*(\varepsilon)=\left(v_1^1(0)+a_{12}/\lambda^0+o(1)\right)\varepsilon_1=$$

$$=\left(\frac{a_{11}v_1^1(0)+a_{12}-a_{21}(Q_1^-(0)/Q_2^-(0)))}{\lambda^0}+o(1)\right)\varepsilon_1=$$

$$=\left(\frac{\lambda_1^0 v_1^1(0)-\lambda_1^0(Q_1^-(0)/Q_2^-(0))}{\lambda^0}+o(1)\right)\varepsilon_1=\left(\frac{\lambda_1^0 R^*}{\lambda^0}+o(1)\right)\varepsilon_1. \qquad (25)$$

Поэтому δ_{10} можно считать выбранным так, что

$$\forall\varepsilon\in(-\delta_{10},0)\times(-\delta_{10},\delta_{10})\ \operatorname{sgn}(y_1^-(\varepsilon)-y_1^*(\varepsilon))=\operatorname{sgn}R^*=\operatorname{sgn}R.$$

Следовательно, при $R<0$ ($R>0$) сепаратриса $L_{1\varepsilon}^u$ идет в точку C_ε^-, принадлежащую L_ε^- (L_ε^+), а точка N_ε лежит внутри дуги $\overparen{C_\varepsilon^- T_\varepsilon}$ ($\overparen{A_1 C_\varepsilon^-}$).

Пусть сначала $R<0$. Возьмем $\delta\in(0,\delta_{10})$. Поскольку $0<\beta_1(\delta)<\delta$, то мы можем ввести множества B_0, B_j, E_j ($j=1,...,4$) так, как они описаны в теореме.

Пусть отрицательная полутраектория поля X_ε^-, $\varepsilon\in(-\delta,0)\times(-\delta,\delta)$, начинающаяся в точке C_ε^- (C_ε^+), выходят из U в точке $A_\varepsilon^-\in\overparen{A_1A_2}$ ($A_\varepsilon^+\in\overparen{A_1A_2}$). Дуги $\overparen{C_\varepsilon^- T_\varepsilon}$ и $\eta_{1\varepsilon}[\varepsilon_1,0)$ принадлежат области в U, ограниченной простой замкнутой кривой, состоящей из дуг $\overparen{C_\varepsilon^+ S_\varepsilon}$ и $\overparen{C_\varepsilon^- S_\varepsilon}$, соответственно сепаратрис $L_{1\varepsilon}^u$ и $L_{1\varepsilon}^s$, дуг $\overparen{C_\varepsilon^+ A_\varepsilon^+}$ и $\overparen{C_\varepsilon^- A_\varepsilon^-}$ траекторий поля X_ε^- и дуги $\overparen{A_\varepsilon^- A_\varepsilon^+}\subset\overparen{A_1A_2}$. Сепаратриса $L_{2\varepsilon}^u$ не может пересекаться с этой областью. Согласно лемме 1 она либо пересекает дугу $\eta_{1\varepsilon}(0,u_r(\varepsilon))$ (при $\varepsilon_2>0$), либо идет в седло S_ε (при $\varepsilon_2=0$) либо первый раз пересекает дугу $\overparen{A_1T_\varepsilon}$ в точке на $\overparen{A_1C_\varepsilon^-}$. Отсюда, из лемм 1 и 2 и из структуры линейных особенностей и особых точек на дуге $\overparen{A_1T_\varepsilon}$ получаем описанные в теореме структуры фазовых портретов векторных полей X_ε, $\varepsilon\in(-\delta,\delta)^2$, при $R<0$ (см. рис 2). Из этого описания следует, что векторные поля X_ε и $X_{\varepsilon'}$, $\varepsilon,\varepsilon'\in(-\delta,\delta)^2$, топологически эквивалентны в U тогда и только тогда, когда ε и ε' принадлежат одному элементу разбиения области параметров.

Рассмотрим случай $R>0$. Точка N_ε имеет координаты $u_1=u_1^*(\varepsilon), u_2=u_2^*(\varepsilon)$, где $u_i^*(\cdot)$, $i=1,2$, – C^{r-1}-функции на $(-\delta_{10},0)\times(-\delta_{10},\delta_{10})$. Покажем, что

$$u_1^*(\varepsilon)=(\kappa_1+o(1))\varepsilon_1,\ \kappa_1>0;\ u_2^*(\varepsilon)=(\kappa_2+o(1))\varepsilon_1,\ \kappa_2<0. \qquad (26)$$

Отображение $\theta_{3\varepsilon}\circ\theta_{2\varepsilon}$ можно представить в виде $u_1=y_1-v_1^2(0)y_2+{}$ $+o(|y|+|\varepsilon|)$, $u_2=-y_1+v_1^1(0)y_2+o(|y|+|\varepsilon|)$. Отсюда и из (23) получаем (26) с $\kappa_1 = -a_{12} / \lambda^0 - v_1^2(0) < 0$ и $\kappa_2 = a_{12} / \lambda^0 + v_1^1(0)$. Следуя выкладкам из (25), имеем $\kappa_2 = \lambda_1^0 R^* / \lambda^0 < 0$.

Аналогично построению функций $f_\pm$, используя (26), получаем, что при достаточно малом $\delta_{11} \in (0, \delta_{10})$ положительная полутраектория поля X_ε, $\varepsilon \in (-\delta_{11}, 0) \times (-\delta_{11}, \delta_{11})$, начинающаяся в точке N_ε, пересекает дугу $\eta(-1,1)$ в точке $\eta(f_*(\varepsilon))$, где $f_*(\varepsilon) = v_-(\varepsilon) + |\varepsilon_1|^{1+1/\gamma(\varepsilon)}(l_* + \alpha_4(\varepsilon))$, $l_* < 0$, $\alpha_4 \in C^1$, $\alpha_4(0) = 0$.

Рассмотрим C^1-функцию

$$\Delta_2(\varepsilon) := v_+(\varepsilon) - f_*(\varepsilon) = \varepsilon_2 - |\varepsilon_1|^{1+1/\gamma(\varepsilon)}(l_* + \alpha_4(\varepsilon))$$

при $\varepsilon \in (-\delta_{11}, 0) \times (-\delta_{11}, \delta_{11})$ и $\Delta_2(\varepsilon) := \varepsilon_2$ при $\varepsilon \in [0, \delta_{11}) \times (-\delta_{11}, \delta_{11})$. При $\varepsilon \in (-\delta_{11}, 0) \times (-\delta_{11}, \delta_{11})$ выходящая сепаратриса $L_{2\varepsilon}^u$ седла S_ε первый раз пересекает дугу $\widehat{A_1 T_\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_2(\varepsilon) = 0$. Так как $\partial\Delta_2(0) / \partial\varepsilon_2 = 1$, $\partial\Delta_2(0) / \partial\varepsilon_1 = 0$, $\partial\Delta_2(\varepsilon) / \partial\varepsilon_1 > 0$ при $\varepsilon \in (-\delta_{11}, 0) \times (-\delta_{11}, \delta_{11})$, то $\delta \in (0, \delta_{11})$ можно выбрать так, что

$$\forall \varepsilon \in (-\delta, \delta)^2 \;\; \operatorname{sgn} \Delta_2(\varepsilon) = \operatorname{sgn}(\varepsilon_2 - \beta_4(\varepsilon_1)), \qquad (27)$$

где $\beta_4 : (-\delta, \delta) \to (-\delta, 0]$, $\beta_2 \in C^1$, $\beta_4(0) = \beta_4'(0) = 0$, $0 < \beta_4'(\varepsilon_1) < 1$ при $\varepsilon_1 \in (-\delta, 0)$.

Определим множества B_0, B_j, E_j ($j = 1, ..., 5$) так, как они описаны в формулировке теоремы. Как и в случае $R < 0$, используя дополнительно (27), получаем описанные в теореме структуры фазовых портретов векторных полей X_ε, $\varepsilon \in (-\delta, \delta)^2$ при $R > 0$ (см. рис. 3).

Библиографический список

1. **Филиппов, А. Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985. – 224 с.
2. **Bernardo, M. di.** Piecewise smooth dynamical systems / M. di Bernardo, Ch. J. Budd, A. R. Capneys, P. Kowalczyk // Appl. Math. Sci. – London : Springer-Verlag, 2008. – Vol. 163. – 483 p.
3. **Guardia, M.** Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems / M. Guardia, T. M. Seara, M. A Teixeira. // J. of Differential Equations. – 2011. – Vol. 250, № 4. – P. 1967–2023.
4. **Ройтенберг, В. Ш.** О бифуркациях кусочно-гладких векторных полей, имеющих петлю сепаратрисы седла, находящегося на линии разрыва / В. Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика : межвуз. сб. науч. тр. – Вып. 6. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2008.– С. 46–56.
5. **Ройтенберг, В. Ш.** О бифуркациях в окрестности особой точки типа «трехкратный сшитый фокус» / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 2. – С. 18–31.
6. **Ройтенберг, В. Ш.** О бифуркациях предельного цикла, проходящего через точку пересечения линий разрыва векторного поля и касающегося одной из них /

В. Ш. Ройтенберг // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. – 2018. – Т. 50, № 1. – С. 21–34.
7. **Палис, Ж.** Геометрическая теория динамических систем. Введение : пер. с англ. / Ж. Палис, В. Мелу. – Москва : Мир, 1986. – 301 с.

References

1. Filippov A. F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast'yu* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow: Nauka, 1985, 224 p. [In Russian]
2. Bernardo M. di., Budd Ch. J., Capneys A. R., Kowalczyk P. *Appl. Math. Sci*. London: Springer-Verlag, 2008, vol. 163, 483 p.
3. Guardia M., Seara T. M., Teixeira M. A. *J. of Differential Equations*. 2011, vol. 250, no. 4, pp. 1967–2023.
4. Roytenberg V. Sh. *Matematika i matematicheskoe obrazovanie. Teoriya i praktika: mezhvuz. sb. nauch. tr.* [Mathematics and mathematical education. Theory and practice: interuniversity collected papers]. Issue. 6. Yaroslavl: Izd-vo YaGPU, 2008, pp. 46–56. [In Russian]
5. Roytenberg V. Sh. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2017, no. 2, pp. 18–31. [In Russian]
6. Roytenberg V. Sh. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Matematika. Fizika* [Bulletin of Belgorod State University. Series: Mathematics. Physics]. 2018, vol. 50, no. 1, pp. 21–34. [In Russian]
7. Palis Zh., Melu V. *Geometricheskaya teoriya dinamicheskikh sistem. Vvedenie: per. s angl.* [Geometric theory of dynamical systems. Introduction: translated from English]. Moscow: Mir, 1986, 301 p. [In Russian]

Ройтенберг Владимир Шлеймович
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ярославский государственный технический университет (Россия, г. Ярославль, Московский проспект, 88)

Roytenberg Vladimir Shleymovich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of higher mathematics, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovsky avenue, Yaroslavl, Russia)

E-mail: vroitenberg@mail.ru

Образец цитирования:

Ройтенберг, В. Ш. О бифуркациях петли сепаратрисы двумерной кусочно-гладкой динамической системы / В. Ш. Ройтенберг // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2020. – № 1 (53). – С. 36–50. – DOI 10.21685/2072-3040-2020-1-3.